Пределы

§1. Предел функции

1.1. Определение предела

Пусть a — точка числовой прямой, $a \in (b; c)$. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве

$$E := \{x \mid x \in (b; c) \backslash \{a\}\}.$$

Число a называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (обозначается $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$), если для любого положительного числа ε $(\forall \varepsilon > 0)$ существует такое положительное число δ $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$, что для любого x $(\forall x)$ такого, что $0 < |x - a| < \delta$, $x \in E$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание. В определении предела нет никаких условий на значение функции $f(x)$ в точке a, более того, нет даже требования, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a.

Если в определении предела функции $f(x)$ заменить множество E на множество $E_+ = E \cap \{x > a\}$ $(E_- = E \cap \{x < a\})$, то получим определения односторонних пределов в точке $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a-} f(x)\right)$. Берётся правая (левая) полуокрестность точки a, то есть интервал вида $(a, a+\delta)$, $\delta > 0$ $\big((a-\delta, a)\big)$.

Пример 1. Показать, что $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$.

Решение. Как следует из определения предела, необходимо оценить разность $|x^2 - 16|$. Имеем, $|x^2 - 16| = |x - 4| \cdot |x + 4|$. Выделим некоторую окрестность точки 4, например, интервал $(3; 5)$. Для всех $x \in (3; 5)$ имеем $|x + 4| < 9$, следовательно, $|x^2 - 16| < 9 \cdot |x - 4|$. Так как δ-окрестность точки $x = 4$ $(4 - \delta; 4 + \delta)$ не должна выходить за пределы $(3; 5)$, то берём $\delta = \min\left\{1; \frac{\varepsilon}{9}\right\}$, и из предыдущих оценок видно, что из неравенства $0 < |x - 4| < \delta$ следует неравенство $|x^2 - 16| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $\Big[x \to -\infty;$ $x \to \infty\Big]$ $\Big($ обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ $\Big[\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A;$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A\Big]\Big)$, если для любого положительного числа ε $(\forall \varepsilon > 0)$ существует такое положительное число C $(\exists C = C(\varepsilon))$, что для любого x, такого что $x > C$, $x \in E$

$\Big[x < -C, x \in E;\ |x| > C, x \in E\Big]$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример 2. Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-10x+100} = 0$.

Решение. Рассмотрим луч $x > 20$, на котором будем производить дальнейшие оценки. Для $x > 20$ имеем:

$$x^2 - 10x + 100 > x^2 - 10x = x(x-10) > \frac{x^2}{2},$$

следовательно,

$$\left|\frac{x\cos x}{x^2-10x+100}\right| < \frac{x}{x^2/2} = \frac{2}{x}.$$

Таким образом, если $C = \max\left\{20; \frac{2}{\varepsilon}\right\}$, то из неравенства $x > C$ следует

$$\left|\frac{x\cos x}{x^2-10x+100}\right| < \varepsilon, \text{ то есть } \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-10x+100} = 0.$$

Пример 3. Показать, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Запишем с использованием символов утверждение “число A не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$”:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > \exists x_\delta = x(\delta) : 0 < |x_\delta - a| < \delta, x_\delta \in E, |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Если $A = 0$, то возьмём $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и $x_k = \frac{1}{2\pi k + \pi/2}$, тогда

$$\forall \delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : 0 < x_k < \delta \text{ и } |f(x_k) - 0| = |f(x_k| = 1 > \varepsilon_0,$$

таким образом, нуль не есть предел $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$. Если же $A \neq 0$, то возьмём $\varepsilon_0 = \frac{|A|}{2}$ и $x_k = \frac{1}{2\pi k}$. Тогда

$$\forall \delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : 0 < x_k < \delta \text{ и } |f(x_k) - A| = |A| > \varepsilon_0,$$

таким образом, и любое отличное от нуля число не есть предел функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

1.2. Свойства пределов

Сформулируем основные утверждения, используемые для вычисления пределов.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x);$$

если $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)};$$

если в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$ имеем

$$f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) \text{ и } \lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = A, \text{ то } \lim_{x\to a} g(x) = A.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 + 3x^2 + 4x - 5)$.

Решение. Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения получаем, что

$$\lim_{x\to 2}(x^3 + 3x^2 + 4x - 5) = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 5 = 23.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-1}{x^3-2x+1}$.

Решение. Пользуясь утверждениями о пределе отношения получаем, что

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-1}{x^3-2x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^3-2x+1)} = \frac{(-2)^2-1}{(-2)^3-2\cdot(-2)+1} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Замечание. В дальнейшем будем пользоваться тем, что для любой элементарной функции $f(x)$ и любой точки a из её области определения справедливо соотношение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

При вычислении пределов часто применяется следующая теорема о пределе композиции: если функция $f(x)$ и существует $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, то

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t)) = f\left(\lim_{t\to t_0} x(t)\right) = f(a).$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 4\pi}\ln\left(1+\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

Решение. Напишем цепочку соотношений:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_2 = \sin y_1, \quad y_3 = y_2^2, \quad y_4 = 1 + y_3,$$
$$y_5 = \sqrt{y_4}, \quad y_6 = 1 + y_5, \quad y_7 = \ln y_6.$$

Применяя последовательно теорему о пределе композиции, получим

$$\lim_{x\to 4\pi} y_1(x) = 2\pi, \quad \lim_{x\to 4\pi} y_2(x) = \lim_{y_1\to 2\pi} \sin y_1 = 0,$$
$$\lim_{x\to 4\pi} y_3(x) = \lim_{y_2\to 0} y_2^2 = 0, \quad \lim_{x\to 4\pi} y_4(x) = \lim_{y_3\to 0}(1+y_3) = 1,$$
$$\lim_{x\to 4\pi} y_5(x) = \lim_{y_4\to 1} \sqrt{y_4} = 1, \quad \lim_{x\to 4\pi} y_6(x) = \lim_{y_5\to 1}(1+y_5) = 2,$$
$$\lim_{x\to 4\pi} \ln\left(1+\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}\right) = \lim_{x\to 4\pi} y_7(x) = \lim_{y_6\to 2} \ln y_6 = \ln 2.$$

Замечание. В теореме о пределе композиции условие непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=a$ нельзя заменить на условие существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$. Дело в том, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ и $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t))$ существует, то верно равенство $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, но существование предела $f(x(t))$ не следует из существования пределов функций $f(x)$ и $x(t)$.

Пусть a — точка расширенной числовой прямой (то есть число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞). Обозначим через $U(a)$ окрестность точки a: если a — число, то $U(a)$ — интервал с центром в точке a; если $a=+\infty$, то $U(a)$ — любой луч $x>\alpha$; если $a=-\infty$, то $U(a)$ — любой луч $x<\alpha$; если $a=\infty$, то $U(a)$ — объединение двух лучей: $\{x>\alpha\}\cup\{x<\alpha\}$. Обозначим через $\dot U(a)$ проколотую окрестность точки a: $\dot U(a) = U(a)\setminus\{a\}$.

1.3. Бесконечно большая функция

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если для любого положительного числа C существует окрестность $U(a)$ такая, что $|f(x)|>C$ для любого $x\in \dot U(a)\cap E$ (E — множество определения функции $f(x)$).

Заменяя в этом определении неравенство $|f(x)|>C$ на $f(x)>C$ ($f(x)<\,<C$) получаем определение положительной (отрицательной) бесконечно большой функции.

Утверждение, что функция $f(x)$ при $x\to a$ является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой) записывается в виде:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\right).$$

Сформулируем основные соотношения для бесконечно больших функций.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $f(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$, и обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = +\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A \neq 0$, $f_2(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^3+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}$.

Решение. Пользуясь утверждением о пределе произведения, получаем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^3+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)} = \lim_{x\to 0} \ln(x^3+4x+2) \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \ln(x^{10}+x^3+x^2)} = \ln 2 \cdot 0 = 0.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{2^x}$.

Решение. Рассмотрим обратную величину $\frac{2^x}{x} = 2^x \cdot \frac{1}{x}$. Применяем утверждение о пределе произведения и получаем:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to -\infty} \left(2^x \cdot \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} 2^x \cdot \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{2^x} = -\infty$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+4x} + x\right)$.

Решение. Требуется вычислить предел суммы двух бесконечно больших при $x \to +\infty$ функций, поэтому

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+4x} + x\right) = +\infty.$$

§2. Вычисление предела в случае неопределённости

При вычислении пределов

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right), \quad \lim_{x\to a} \left(f(x) - g(x)\right)$$

могут возникнуть ситуации, когда непосредственное применение теорем о свойствах пределов и бесконечно больших функций не даёт возможность их вычислить. Такое положение возможно в следующих случаях.

1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (символически обозначается $\left[\frac{0}{0}\right]$);
б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x))$:
   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $[0 \cdot \infty]$).
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$:
   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $[\infty - \infty]$).

В том случае, когда имеет место неопределённость, для вычисления предела - “раскрытия неопределённости” - преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные соотношения или сравнения поведения функции при стремлении $x \to a$ (соотношения эквивалентностей).

Функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to a$ ($f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$), если существует такая функция $\alpha(x)$, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \to 1$ при $x \to 0$.

Соотношения эквивалентностей обладают следующими свойствами (везде подразумевается, что $x \to a$).

1. Если $f(x) \sim g(x)$, то $g(x) \sim f(x)$.
2. Если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) \sim h(x)$.
3. Если $f(x) \sim g(x)$ и $h(x) \sim s(x)$, то $f(x) \cdot h(x) \sim g(x) \cdot s(x)$.
4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$, то $f(x) \sim k$.

Справедливы следующие соотношения (два основных предела):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

В другой записи:

$$\sin x \sim x \text{ при } x \to 0, \quad e^x - 1 \sim x \text{ при } x \to 0.$$

Отсюда получаем, что при $x \to 0$:

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim x,$$
$$\arcsin x \sim \sin(\arcsin x) = x, \quad \ln(1+x) \sim e^{\ln(1+x)} - 1 = x.$$

Сведём полученные и аналогичные им соотношения в таблицу.

Эквивалентности при $x \to 0$
$\sin x \sim x$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
$\operatorname{tg} x \sim x$
$\arcsin x \sim x$
$\operatorname{arctg} x \sim x$
$e^x - 1 \sim x$
$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\ln(1+x) \sim x$
$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \quad (m \geqslant 1, n \geqslant 1, a_n b_m \neq 0).$$

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^m.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + \ldots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + \ldots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)} =$$

$$= \frac{1}{b_m} \lim_{x\to+\infty} \left(a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + \ldots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{при } m > n, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{при } m > n, \\ \infty & \text{при } m > n. \end{cases}$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3+2x^2-4}{6x^2+8x+9}$.

Решение. Согласно примеру 1 $m = 2$, $n = 3$, отсюда $m < n$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 4}{6x^2 + 8x + 9} = \infty.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^3-3x+2}{8x^4-6x^3+5x+1}$.

Решение. Согласно примеру 1 $m = 4$, $n = 3$, отсюда $m > n$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{8x^4 - 6x^3 + 5x + 1} = 0.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3+6x^2-7x+2}{8x^3-12x+9}$.

Решение. Согласно примеру 1 $m = n = 3$, $b_m = 8$, $a_n = 5$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 + 6x^2 - 7x + 2}{8x^3 - 12x + 9} = \frac{5}{8}.$$

Пример 5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt[3]{8x^3+7}}{\sqrt[5]{x^5+9}}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель на x.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt[3]{8x^3+7}}{\sqrt[5]{x^5+9}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + \frac{\sqrt[3]{8x^3+7}}{x}}{\frac{\sqrt[5]{x^5+9}}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + \sqrt[3]{8+\frac{7}{x^3}}}{\sqrt[5]{1+\frac{9}{x^5}}} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Сделаем следующие преобразования.

$$\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)} = \frac{2\ln|x| + \ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{10\ln|x| + \ln\left(1+\frac{x^3+x}{x^{10}}\right)} = \frac{2 + \frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{10 + \frac{\ln\left(1+\frac{x^2+x}{x^{10}}\right)}{\ln|x|}}.$$

Применяя соотношения для бесконечно больших функций и для вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right) \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln|x|} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x^2+1}{x^9}\right)}{\ln|x|} = 0,$$

откуда, применяя соотношения для вычисления пределов, окончательно получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2+0}{10+0}=\frac{1}{5}.$$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$. Если $x<0$, то

$$\sqrt{x^2+4x+5}+x=\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\frac{4+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-1},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)=-2$.

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-x\right)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$.

$$\sqrt{x^2+9x}-x=\frac{x^2+9x-x^2}{\sqrt{x^2+9x}+x}=\frac{9x}{\sqrt{x^2+9x}+x}=$$

$$=\frac{9}{\sqrt{\frac{x^2+9x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\frac{9}{\sqrt{1+\frac{9}{x}}+1},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-x\right)=\frac{9}{2}$.

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. В проколотой окрестности точки $x=1$ функции

$$\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}\text{ и }\frac{x^2+x+1}{x-3}$$

тождественно равны, значит, имеют при $x\to1$ один и тот же предел. Предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-3}$ вычисляется с использованием утверждения о пределе частного и пределе многочлена. Итак,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}}{\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-3}}=-\frac{3}{2}.$$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Пользуясь соотношениями эквивалентности получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Внимание! Соотношения эквивалентностей можно применять только в случае, когда функция, которую заменяют на эквивалентную, является множителем всего выражения. Замену на эквивалентную функцию в отдельном слагаемом алгебраической суммы делать нельзя.

В случае, когда $\lim\limits_{x\to a} t(x)=0$, справедливы следующие соотношения, следующие из определения эквивалентных функций и теоремы о пределе композиции функций.

Эквивалентности при $x\to a$ $\lim\limits_{x\to a} t(x)=0$
$\sin t(x)\sim t(x)$
$1-\cos t(x)\sim \frac{t^2(x)}{2}$
$\operatorname{tg} t(x)\sim t(x)$
$\arcsin t(x)\sim t(x)$
$\operatorname{arctg} t(x)\sim t(x)$
$e^{t(x)}-1\sim t(x)$
$a^{t(x)}-1\sim t(x)\ln a$
$\ln(1+t(x))\sim t(x)$
$\log_a(1+t(x))\sim \frac{t(x)}{\ln a}$
$(1+t(x))^m-1\sim m\cdot t(x)$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\arcsin(x+3)}{x^2+3x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция

$$\arcsin(x+3)=\arcsin t(x),\ \text{где } t(x)=x+3 \text{ и } \lim_{x\to-3} t(x)=0,$$

поэтому справедливо соотношение $\arcsin(x+3)\sim x+3$ при $x\to-3$. Итак,

$$\lim_{x\to-3}\frac{\arcsin(x+3)}{x^2+3x}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2+3x}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x(x+3)}=-\frac{1}{3}.$$

Пример 12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 10x}{1-\cos 15x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим функцию

$$1-\cos 10x=1-\cos t(x),\ \text{где } t(x)=10x \text{ и } \lim_{x\to0}10x=0,$$

поэтому $1-\cos 10x\sim\frac{(10x)^2}{2}$. Аналогично, $1-\cos 15x\sim\frac{(15x)^2}{2}$, отсюда получим

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 10x}{1-\cos 15x}=\lim_{x\to0}\frac{(10x)^2}{(15x)^2}=\frac{4}{9}.$$

Пример 13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}\frac{4^x-64}{x-3}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Представим функцию, стоящую в числителе, в виде

$$4^x - 64 = 4^x - 4^3 = \left(\frac{4^x}{4^3} - 1\right) \cdot 4^3 = 4^3 \cdot \left(4^{x-3} - 1\right).$$

Функция $4^{x-3} - 1 = 4^{t(x)} - 1$, где $t(x) = x - 3$ и $\lim\limits_{x\to 3} t(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x-3) = 0$, отсюда видно, что $4^{x-3} - 1 \sim (x-3)\ln 4$ при $x \to 3$. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 3} \frac{4^x - 64}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{4^3 \cdot \ln 4 \cdot (x-3)}{x-3} = 4^3 \cdot \ln 4.$$

Пример 14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4^x - 10^x}{3^x - 7^x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим выражение, стоящее в числителе: $4^x - 10^x = \left[\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1\right] \cdot 10^x$. Легко заметить, что при $x \to 0$ $\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1 \sim x \ln\frac{4}{10}$. Рассмотрим выражение, стоящее в знаменателе: $3^x - 7^x = \left[\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1\right] \cdot 7^x$ и при $x \to 0$ $\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1 \sim x\ln\frac{3}{7}$. Получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 10^x}{3^x - 7^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1\right) \cdot 10^x}{\left(\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1\right) \cdot 7^x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \ln\frac{4}{10} \cdot 10^x}{x \cdot \ln\frac{3}{7} \cdot 7^x} =$$

$$= \frac{\ln\frac{4}{10}}{\ln\frac{3}{7}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{10^x}{7^x} = \frac{\ln\frac{4}{10}}{\ln\frac{3}{7}} = \frac{\ln\frac{2}{5}}{\ln\frac{3}{7}}.$$

Пример 15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция, стоящая в числителе $\sqrt[3]{1+2x} - 1 \sim (2x) \cdot \frac{1}{3}$, так как $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, отсюда получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot 2x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7^{x/2} - 1}{\ln(1+3x)}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция, стоящая в числителе $7^{x/2} - 1 \sim \frac{x}{2}\ln 7$ при $x \to 0$, а функция, стоящая в знаменателе $\ln(1+3x) \sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{7^{x/2} - 1}{\ln(1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}\ln 7}{3x} = \frac{\ln 7}{6}.$$

Пример 17. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x} - 1}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{1+2x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[7]{1-3x}=1$, то представим выражение, стоящее в числителе в виде

$$\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}=\sqrt[3]{1+2x}-1+1-\sqrt[7]{1-3x}$$

и вычислим сумму пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\sqrt[8]{1+x}-1}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot 2x}{\frac{1}{8}\cdot x}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{7}\cdot 3x}{\frac{1}{8}\cdot x}=\frac{16}{3}+\frac{24}{7}=\frac{184}{21}.$$

Очень часто при работе с функциями вида:

$$\ln g(x) \text{ и } \left(g(x)\right)^m-1, \text{ где } \lim_{x\to a}g(x)=1,$$

используется преобразование

$$g(x)=(g(x)-1)+1=t(x)+1, \text{ где } t(x)=g(x)-1 \text{ и } \lim_{x\to a}t(x)=0.$$

Отсюда получаем

$$\ln g(x)\sim g(x)-1 \text{ и } \left(g(x)\right)^m-1\sim m\cdot(g(x)-1), \text{ где } \lim_{x\to a}g(x)=1.$$

Пример 18. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим выражение, стоящее в знаменателе, в окрестности нуля.

$$\sqrt{1+x\sin x}-\cos x=\cos x\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}}-1\right).$$

Выражение, стоящее под знаком корня, стремится к 1: $\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}\to 1$ при $x\to 0$. Представим это выражение в виде

$$\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}=1+\left(\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}-1\right)=1+\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

Отсюда и из сказанного выше следует, что

$$\sqrt{\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x+x\sin x}{\cos^2 x}.$$

Перейдём к вычислению предела.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(3x)^2}{\cos x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x+x\sin x}{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\cdot(3x)^2}{\sin x(\sin x+x)}=18\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x(\sin x+x)}=18\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x+x}.$$

Для вычисления последнего предела применим свойство:

$$\text{если } \lim_{x\to a}f(x)=b\neq0, \text{ то } \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{b}.$$

Находим:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1+1=2.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x+x}=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=18\cdot\frac{1}{2}=9.$$

Пример 19. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{3x-1}{3x-6}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[0\cdot\infty]$. Рассмотрим функцию $\ln\frac{3x-1}{3x-6}$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{3x-6}=1$, то представим выражение, стоящее под знаком логарифма, в виде

$$\frac{3x-1}{3x-6}=1+\left(\frac{3x-1}{3x-6}-1\right)=1+\frac{5}{3x-6}=1+t(x),$$

$$\text{где } \lim_{x\to\infty}t(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3x-6}=0.$$

Справедливо соотношение

$$\ln\frac{3x-1}{3x-6}=\ln\left(1+\frac{5}{3x-6}\right)\sim\frac{5}{3x-6}.$$

Вычислим предел:

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{3x-1}{3x-6}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{5}{3x-6}=\frac{5}{3}.$$

§3. Вычисление предела степенно-показательной функции

Степенно-показательной функцией называется функция вида $(u(x))^{v(x)}$, $u(x)>0$.

Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем
$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x))}.$$
Таким образом, нахождение предела степенно-показательной функции сводится к нахождению предела $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x))$.

Если $\lim\limits_{x\to a} v(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \ln u(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x) = e^B$, так как
$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\ln u(x)} = e^B.$$
Отсюда,
$$e^{\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x))} = e^{A\cdot B} = \left(e^B\right)^A = \left(\lim_{x\to a} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$
Другими словами, если
$$\lim_{x\to a} u(x) = u,\ u > 0 \text{ и } \lim_{x\to a} v(x) = v,\ \text{ то } \lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = u^v.$$

Если $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x)) = +\infty$, то и $e^{(v(x)\ln u(x))} \to +\infty$ при $x\to a$. Если $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x)) = -\infty$, то $e^{(v(x)\ln u(x))} \to 0$ при $x \to a$.

Отсюда видно, что если $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\ln u(x)) = \infty$ и произведение $v(x)\ln u(x)$ не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности точки a, то функция $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ не имеет предела при $x \to a$.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+5}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5) = 6$, то
$$\lim_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+5} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{1}{8}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\ln x}$.

Решение. Представим $\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\ln x}$ в виде:
$$\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\ln x} = e^{\ln x\cdot\ln\frac{x^2+3}{3x^2+1}}.$$
Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{3x^2+1} = \frac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\cdot\ln\frac{x^2+3}{3x^2+1} = -\infty$, следовательно
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\ln x} = 0.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Представим $\left(\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{x^2}}$ в виде:

$$\left(\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}\ln\sin^2 x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$, то

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\sin^2 x\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0}\left(\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Пусть в произведении $v(x)\ln u(x)$ предел одного из сомножителей при $x \to a$ равен нулю, а второй сомножитель является бесконечно большой функцией при $x \to a$. Такое возможно в трёх случаях:

1) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$ (символически обозначается $\left[\infty^0\right]$);
2) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ (символически обозначается $\left[0^0\right]$);
3) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ (символически обозначается $[1^\infty]$).

В этих случаях для вычисления пределов применяют приёмы, которые были показаны при вычислении пределов в случаях неопределённостей.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[1^\infty]$. Представим в виде:

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2x}\ln(1+\sin x)}.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Получим

$$\lim_{x\to 0+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a > 1,\ p > 0),$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^q x}{x^p} = 0 \quad (p > 0,\ q > 0),$$

$$\lim_{x\to 0+} x^p\ln^q x = 0 \quad (p > 0,\ q > 0).$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[0^0\right]$. Представим $x^x = e^{x\ln x}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$.

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\infty^0\right]$. Представим

$$\left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{5x^2+1}{x-4}}.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{5x^2}{x-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x\cdot\frac{5x+\frac{1}{x}}{x-4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\ln x + \ln\frac{5x+\frac{1}{x}}{x-4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{5x^2+1}{x^2-4x} = 0+0 = 0.$$

Отсюда окончательно получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить предел:

1. $\lim\limits_{x\to-1}(x^3+5x^2+6x+1)$;

2. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$;

3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$;

4. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$;

5. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$;

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin4x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos2x}$;

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos2x}$;

9. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

10. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$;

11. $\lim\limits_{x\to3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;

12. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin2x-\cos2x-1}{\cos x-\sin x}$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+5x+1}{3+14x^2+2x}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^2+2}$;

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+4}{x^2+5}$;

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$;

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5}$;

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$;

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$;

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

24. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

25. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$;

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$;

27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$;

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$;

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{4-x^2}+2^{\frac{1}{x-1}}\right)$;

30. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

31. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}$;

32. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$;

33. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$;

34. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$;

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

37. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{3+x+x^2}}{x^2-3x+2}-\frac{\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}\right)$;

38. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

39. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

40. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

41. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^3+2x^2}$;

43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1}-1}$;

44. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$;

45. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$;

46. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 10x}{\sin 9x}$;

47. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}$;

48. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$;

49. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

50. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1}-1}$;

51. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$;

52. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2x}$;

53. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$;

54. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{x^2-9}+4^{-\frac{1}{(x-3)^2}}\right)$;

55. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$;

56. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\frac{1}{\cos 2x}-1}$;

57. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+b)+\sin(x-b)}{2x}$;

58. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$;

59. $\lim\limits_{n\to \infty}3^n\sin\frac{x}{3^n}$;

60. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$;

61. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

62. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$;

63. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$;

64. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$;

65. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$;

66. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt[5]{x}-1)(2^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}$;

67. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{\frac{4}{5}}-1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$;

68. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$;

69. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{3x}$;

70. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^{10}-1}$;

71. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$;

72. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e}$;

73. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\lg \frac{x}{10}}{x-10}$;

74. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$;

75. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$;

76. $\lim\limits_{n\to \infty} n^2 \ln \cos \frac{\pi}{n}$.

77. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln \log_2 x}{x-2}$;

78. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}$;

79. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4^x-64}{x-3}$;

80. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x}$;

81. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x}-e^{3x}}{\sin 4x-\sin 3x}$;

82. $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln \frac{4+x}{2+x}$;

83. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$;

84. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\ln(2x+5)-\ln(2x+1)\right)$;

85. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lg(1+10x)}{\log_7(1+5x)}$;

86. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$;

87. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{3^x-1}$;

88. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4^x-1}{\arccos x}$;

89. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x}-3^{\sin x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;

90. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4^{x-2}-1}{3^{x-2}-1}$;

91. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{5^x-5^5}{\operatorname{arctg}(x-5)}$;

92. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1}$;

93. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-2x)}$;

94. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$;

95. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln\ln x}{2x-2e}$;

96. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\log_3 x-1}{x-3}$;

97. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$;

98. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

99. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$;

100. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

101. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n}$;

102. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^{n}$;

103. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

104. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

105. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$;

106. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;

107. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+4)-\ln n)$;

108. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln n-\ln(n+2))$;

109. $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{3x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$;

110. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$;

111. $\lim\limits_{x\to 0} (2^x+\sin 3x)^{\operatorname{ctg} 3x}$;

112. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

113. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos 4x+2x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

114. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{1/\cos\frac{\pi x}{2}}$;

115. $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{x^2}+\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

116. $\lim\limits_{x\to 5} \left(2-\frac{x}{5}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{5}}$;

117. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3+x}{7+x}\right)^{1/\sin\frac{2}{x}}$;

118. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 7x-1}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}$;

119. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$;

120. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+\sin x}{3+2x}$;

121. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;

122. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$;

123. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$;

124. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$;

125. $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{1-5^n}{1+5^{n+1}}$;

126. $\lim\limits_{n\to -\infty}\frac{3-10^n}{4+10^{n+1}}$;

127. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x\left(\sqrt[3]{1+3x^2}-1\right)}{x\ln\cos 3x}$;

128. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{6}}\frac{2^{3x}-\sqrt{2}}{6x-1}$;

129. $\lim\limits_{x\to \infty}2x\log_2\frac{3+x}{4+x}$;

130. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin(1-x)}{1-x^2}$;

131. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\frac{7}{x}\right)^{x^2}$;

132. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 2}{\sin 5x-\sin 4x}$;

133. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)\sin(x-2)}{x^2-4x+4}$;

134. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^a-2^a}{x^b-2^b}$;

135. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$;

136. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1+\operatorname{tg} x}{x}$;

137. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}$;

138. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$;

139. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cos(3x-9)-\cos(2x-6)}{\sqrt{x^2-6x+10}-1}$;

140. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\sqrt{x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}}-1}$;

141. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{\log_3(3+x^2)-1}$;

142. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\log_3 x-1}$;

143. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log_4\cos(x-1)}{\sqrt[5]{2+x^2-2x}-1}$;

144. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4^x-16}{\sqrt[5]{3-x}-1}$;

145. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+5\sin x}{x+1}$;

146. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}}{x^2-3x-4}$;

147. $\lim\limits_{x\to8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}$;

148. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+1}$;

149. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\log_3(1+3x)+\log_3(1-3x)}{x^2}$;

150. $\lim\limits_{x\to5} \frac{\sin x-\sin 5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;

151. $\lim\limits_{x\to7} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{7}}{x-7}$;

152. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cos\pi x}{\operatorname{ctg} 7\pi x}$;

153. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{36x^2-\pi^2}$;

154. $\lim\limits_{x\to3} \frac{2^x-8}{\sin\pi x}$;

155. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x-1}{\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}}$;

156. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}{\sin\pi x}$;

157. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{2+3x}-2}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}$;

158. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 5x+\sin 6x+\sin 7x}{\sin 9x-\sin 4x}$;

159. $\lim\limits_{x\to9} \frac{\sin\frac{\pi x}{3}}{\log_3(2x-17)}$.

Ответы

1. -1. **2.** 10. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** 1. **5.** $\frac{1}{5}$. **6.** $\frac{1}{2}$. **7.** 1. **8.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **9.** -8. **10.** $\frac{1}{6}$. **11.** -12. **12.** -1. **13.** $-\sqrt{2}$. **14.** 3. **15.** $\frac{1}{2}$. **16.** $-\frac{5}{2}$. **17.** 0. **18.** ∞. **19.** $\frac{1}{3}$. **20.** $\frac{1}{9}$. **21.** 1. **22.** 3. **23.** 1. **24.** -1. **25.** 3. **26.** 0. **27.** $-\frac{1}{3}$. **28.** $\sqrt{2}$. **29.** -2. **30.** 1. **31.** $-\frac{1}{2}$. **32.** 2. **33.** 3. **34.** $-\frac{3}{2}$. **35.** $-\frac{1}{2}$. **36.** 0. **37.** $\frac{1}{2}$. **38.** $\frac{15}{2}$. **39.** $\frac{1}{2}$. **40.** 0. **41.** ∞. **42.** $-\frac{1}{12}$. **43.** $\frac{2}{9}$. **44.** 4. **45.** $\frac{4}{5}$. **46.** $-\frac{10}{9}$. **47.** 0. **48.** 4. **49.** 2. **50.** 14. **51.** $\frac{1}{2}$. **52.** $\frac{1}{2}$. **53.** $-\frac{1}{2}$. **54.** $\frac{1}{6}$. **55.** $-2\sin a$. **56.** 1. **57.** $\cos b$. **58.** 1. **59.** x. **60.** $\frac{n^2-m^2}{2}$. **61.** $-\frac{1}{3}$. **62.** $\frac{5}{8}$. **63.** $\frac{8}{7}$. **64.** -6. **65.** $\frac{5}{12}$. **66.** $-\frac{2\ln 2}{5}$. **67.** $\frac{8}{15}$. **68.** $\frac{5}{3}$. **69.** $\frac{1}{6}$. **70.** $\frac{3}{5}$. **71.** $-\frac{1}{54}$. **72.** $\frac{1}{e}$. **73.** $\frac{1}{10\ln 10}$. **74.** -1. **75.** $\frac{a^2}{b^2}$. **76.** $-\frac{\pi^2}{2}$. **77.** $\frac{1}{2\ln 2}$. **78.** 1. **79.** $64\ln 4$. **80.** $\ln\frac{3}{2}$. **81.** 1. **82.** 2. **83.** -2. **84.** 2. **85.** $2\frac{\ln 7}{\ln 10}$. **86.** $\frac{3}{5}$. **87.** $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. **88.** 0. **89.** $4\ln 3$. **90.** $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. **91.** $5^5\ln 5$. **92.** $\frac{1}{5}$. **93.** $-\frac{1}{2}$. **94.** $\frac{1}{3\ln 2}$. **95.** $\frac{1}{2e}$. **96.** $\frac{1}{3\ln 3}$. **97.** e^2. **98.** e. **99.** e^{-2}. **100.** e^4. **101.** 1. **102.** $e^{-\frac{a^2}{2}}$. **103.** $\frac{1}{e}$. **104.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **105.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **106.** $e^{\operatorname{ctg} 2}$. **107.** 4. **108.** -2. **109.** e^4. **110.** e^{-2}. **111.** $e\sqrt[3]{2}$. **112.** $\frac{1}{e}$. **113.** e^{-6}. **114.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **115.** $+\infty$. **116.** $e^{-\frac{1}{\pi}}$. **117.** e^{-2}. **118.** $-\frac{49}{2}$. **119.** 3. **120.** $\frac{1}{2}$. **121.** -3. **122.** 3. **123.** -1. **124.** $\frac{3}{2}$. **125.** $-\frac{1}{5}$. **126.** $\frac{3}{4}$. **127.** $-\frac{8}{9}$. **128.** $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$. **129.** $-\frac{2}{\ln 2}$. **130.** $\frac{1}{2}$. **131.** $e^{-\frac{49}{2}}$. **132.** 1. **133.** -1. **134.** $\frac{a}{b}2^{a-b}$. **135.** $\sqrt{e}$. **136.** $\frac{8}{7}$. **137.** 12. **138.** $\ln 2$. **139.** -5. **140.** -1. **141.** $-12\ln 3$. **142.** $-\frac{9\ln 3}{8}$. **143.** $-\frac{5}{4\ln 2}$. **144.** $-160\ln 2$. **145.** -1. **146.** $-0,1$. **147.** $\frac{1}{108}$. **148.** $\frac{1}{3}$. **149.** $-\frac{9}{\ln 3}$. **150.** $2\sqrt{5}\cos 5$. **151.** $\frac{\pi}{7}$. **152.** $\frac{1}{7}$. **153.** $\frac{1}{6\pi}$. **154.** $-\frac{8\ln 2}{\pi}$. **155.** $-2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$. **156.** $-\frac{2}{3\pi}$. **157.** $-\frac{1}{\pi}$. **158.** $\frac{6}{13}$. **159.** $-\frac{\pi\ln 3}{6}$.